MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 8
11.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

1. Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 5\,\lambda = \lambda\left(\lambda^2 - 2\,\lambda + 5\right)$$

besitzt die einfache reelle Nullstelle $\lambda_1 = 0$ sowie (unter Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen) die beiden konjugiert–komplexen Nullstellen

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}\right) = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{-16}\right) = 1 \pm 2\,i.$$

Damit bilden nach Satz 2.15 der Vorlesung die Funktionen φ_1, φ_2, $\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^0 = 1 \quad , \quad \varphi_2(x) = e^x \cos(2x) \quad , \quad \varphi_3(x) = e^x \sin(2x)$$

ein Fundamentalsystem von $y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$ und für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi_{c_1,c_2,c_3} = \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 + c_2\,e^x \cos(2x) + c_3\,e^x \sin(2x)$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$, welche nun den gegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$ und $y''(0) = -11$ anpaßt wird. Wegen

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = c_2\left(e^x \cos(2x) - 2\,e^x \sin(2x)\right) + c_3\left(e^x \sin(2x) + 2\,e^x \cos(2x)\right) = \\ = (c_2 + 2\,c_3)\,e^x \cos(2x) + (-2\,c_2 + c_3)\,e^x \sin(2x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi''(x) = (c_2 + 2\,c_3)\left(e^x \cos(2x) - 2\,e^x \sin(2x)\right) + \\ + (-2\,c_2 + c_3)\left(e^x \sin(2x) + 2\,e^x \cos(2x)\right) = \\ = (-3\,c_2 + 4\,c_3)\,e^x \cos(2x) + (-4\,c_2 - 3\,c_3)\,e^x \sin(2x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, ergibt sich aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \quad &: \quad c_1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0 = 0 \Longleftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = -3 \quad &: \quad c_2 + 2\,c_3 = -3 \\ y''(0) = -11 \quad &: \quad -3\,c_2 + 4\,c_3 = -11, \end{aligned}$$

woraus man $c_2 = 1$ und $c_3 = -2$ und $c_1 = -1$ erhält. Folglich ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -1 + e^x \cos(2x) - 2\,e^x \sin(2x),$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

2. Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' - 2a\,y' + b\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2a\,\lambda + b$$

besitzt gemäß der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} = a + \sqrt{a^2 - b} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} = a - \sqrt{a^2 - b}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a^2 - b > 0$ sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. O.E. sei $\lambda_1 \neq 0$.
  Eine Lösung ist dann z.B.
  $$\varphi(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
  und für diese gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ (bei $\lambda_1 > 0$) bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \infty$ (bei $\lambda_1 < 0$). φ ist also nicht beschränkt.
- Für $a^2 - b = 0$ ist $\lambda_1 = \lambda_2 = a \in \mathbb{R}$.
  - Ist $a \neq 0$, so gibt es wie oben eine unbeschränkte Lösung $\varphi(x) = e^{ax}$.
  - Ist $a = 0$, so ist wegen $a^2 - b = 0$ auch $b = 0$ und $\varphi(x) = x$ ist eine unbeschränkte Lösung.
- Für $a^2 - b < 0$ sind
  $$\lambda_1 = a + \sqrt{b - a^2}\,i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = a - \sqrt{b - a^2}\,i$$
  - Ist $a \neq 0$, so ist z.B.
    $$\varphi(x) = e^{ax} \cdot \cos(\sqrt{b - a^2}\,x), \qquad x \in \mathbb{R},$$
    eine Lösung, die wegen $a \neq 0$ nicht beschränkt ist, denn mit $x_n := \frac{2\pi\,n}{\sqrt{b-a^2}}$, $n \in \mathbb{N}$, ist $\varphi(x_n) = e^{a\,x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ falls $a > 0$; im Fall $a < 0$ wählt man $x_n = -\frac{2\pi\,n}{\sqrt{b-a^2}}$.
  - Ist $a = 0$, so ist die allgemeine Lösung
    $$\varphi(x) = c_1 \cos(\sqrt{b}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{b}\,x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
    Da cos und sin beschränkte Funktionen sind, ist auch φ beschränkt.

Also sind insgesamt alle Lösungen beschränkt, nur wenn

$$a = 0, \ \ b > 0.$$

3. a) Aufgrund der Linearität der $k-$ ten Ableitung, $k = 1, ..., n$, ist

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1 + \varphi_2)^{(n)}(x) + a_{n-1}(\varphi_1 + \varphi_2)^{(n-1)}(x) + ... + a_1(\varphi_1 + \varphi_2)'(x) + a_0(\varphi_1 + \varphi_2)(x) \\
&= \varphi_1^{(n)}(x) + \varphi_2^{(n)}(x) + a_{n-1}\varphi_1^{(n-1)}(x) + a_{n-1}\varphi_2^{(n-1)}(x) + ... \\
&\qquad + a_1\varphi_1'(x) + a_1\varphi_2'(x) + a_0\varphi_1(x) + a_0\varphi_2(x) \\
&= b_1(x) + b_2(x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Also ist $\varphi_1 + \varphi_2$ Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = b_1(x) + b_2(x)\ . \qquad (\star)$$

b) Wir betrachten die homogene lieare DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad (\star_0)$$

sowie die beiden inhomogenen linearen DGL

$$y'' - 3y' + 2y = x, \qquad (\star_1)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x, \qquad (\star_2)$$

Allgemeine Lösung von $(\star_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(\star_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ (reell, einfach) und $\lambda_2 = 2$ (reell, einfach).
Die allgemeine Lösung von $(\star_0)$ ist damit

$$\varphi(x) = \varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(\star_1)$:
Die rechte Seite von $(\star_1)$ ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit dem Polynom $p(x) = x$ vom Grad $m = 1$ und $a = 0$; da $a = 0$ **keine** Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist also ist die Vielfachheit $\alpha = 0$.
Für die partikuläre Lösung φ_1 von $(\star_1)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_1(x) = q_1(x)\, e^{ax} = (sx + r)\, e^{0x} = sx + r$$

mit dem Polynom $q_1(x) = sx + r$ vom Grade $m + \alpha = 1 + 0 = 1$.
Es ist also dann

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= sx + r \\ \varphi_1'(x) &= s \\ \varphi_1''(x) &= 0, \qquad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \varphi_1 \text{ Lösung von } (\star_1) &\iff \varphi_1''(x) - 3\varphi_1'(x) + 2\varphi_1(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff 0 - 3s + 2(sx + r) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff (2x - 1)x + 2r - 3s = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff 2s - 1 = 0 \ \ \wedge \ \ 2r - 3s = 0 \\ &\iff s = \frac{1}{2} \ \ \wedge \ \ r = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(\star_1)$.
Partikuläre Lösung von $(\star_2)$:
Die rechte Seite von $(\star_2)$ ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit dem Polynom $p(x) = 1$ vom Grad $m = 0$ und $a = 1$; da $a = 1$ eine einfache Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist also die Vielfachheit $\alpha = 1$.
Für die partikuläre Lösung φ_2 von $(\star_2)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_2(x) = q_2(x)\, e^{ax} = (sx + r)\, e^x = (sx + r)e^x$$

mit dem Polynom $q_2(x) = sx + r$ vom Grade $m + \alpha = 0 + 1 = 1$.
Es ist also dann

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= (sx+r)e^x \\
\varphi_2'(x) &= se^x + (sx+r)e^x \\
\varphi_2''(x) &= se^x + se^x + (sx+r)e^x = 2se^x + (sx+r)e^x, \qquad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \text{ Lösung von } (\star_2) &\iff \varphi_2''(x) - 3\varphi_2'(x) + 2\varphi_2(x) = e^x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 2se^x + (sx+r)e^x - 3se^x - 3(sx+r)e^x + 2(sx+r)e^x = e^x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 2s + (sx+r) - 3s - 3(sx+r) + 2(sx+r) = 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff -s = 1 \\
&\iff s = -1 \qquad (r \text{ beliebig}).
\end{aligned}$$

Da r beliebig ist, wählen wir $r = 0$ und erhalten als partikuläre Lösung von $(\star_2)$ dann

$$\varphi_2(x) = -xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(\star)$:
Nun ist nach a) dann

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - xe^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(\star)$.

Allgemeine Lösung von $(\star)$:
Die allgemeine Lösung von $(\star)$ ist damit

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - xe^x, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung:
Bei der Suche nach einer partikulären Lösung von $(\star_2)$ hätten wir im Ansatz

$$\varphi_2(x) = (sx+r)e^x = sxe^x + re^x,$$

sofort $r = 0$ wählen können; denn, da $x \longmapsto re^x$ eine Lösung der homogenen DGL $(\star_0)$ ist, gilt

$$x \longmapsto sxe^x + re^x \quad \textit{ist Lösung von } (\star_2) \quad \iff \quad x \longmapsto sxe^x \quad \textit{ist Lösung von } (\star_2).$$

---

4. Wir bestimmen zuerst für festes $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des AWP

$$y''(x) - y(x) \ = \ -x + 1 \qquad \text{mit } y(0) = 1, \ y'(0) = a$$

und suchen anschließend diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für die die Lösung die zusätzliche Bedingung $y(1) = 2e$ erfüllt.

Wir betrachten die inhomogene lineare lineare DGL

$$y'' - y = -x + 1 \qquad (*)$$

sowie homogene lineare DGL

$$y'' - y = 0. \qquad (*_0)$$

Allgemeine Lösung von $(*_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1)$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ (reell, einfach).
Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \;\; x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(*)$:
Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form der Form $b(x) = -x + 1 = p(x)\, e^{a\,x}$ mit dem Polynom $p(x) = -x + 1$ vom Grade $m = 1$ und $a = 0$; da $a = 0$ **keine** Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist also die Vielfachheit $\alpha = 0$.

Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{ax} = (rx + s)\, e^{0x} = rx + s$$

mit dem Polynom $q(x) = rx + s$ vom Grade $m + \alpha = 1 + 0 = 1$.
Es ist also dann

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= rx + s \\ \varphi_p'(x) &= r \\ \varphi_p''(x) &= 0, \qquad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \varphi_p \text{ Lösung von } (*) &\iff \varphi_p''(x) - \varphi_p(x) = -x + 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff 0 - (rx + s) = -x + 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff (-r + 1)x + (-s - 1) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff r = 1 \;\; \wedge \;\; s = -1. \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi_p(x) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$ (was man auch erraten und dann durch Einsetzen hätte überprüfen können).

Allgemeine Lösung von $(*)$:
Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x - 1, \;\; x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösung des AWP:
Es ist

$$\varphi'(x) = c_1 e^x - c_2\, e^{-x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen nun für festes $a \in \mathbb{R}$ die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, daß die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = a$ erfüllt sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y(0) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_1 + c_2 - 1 = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) = a \quad &\Longleftrightarrow \quad c_1 - c_2 + 1 = a \quad &\Longleftrightarrow \quad c_1 - c_2 = a - 1. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem in c_1, c_2 hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$c_1 = \frac{a+1}{2}, \qquad c_2 = 2 - \frac{a+1}{2} = \frac{3-a}{2}.$$

Also ist

$$\varphi(x) = \frac{a+1}{2}\, e^x + \frac{3-a}{2}\, e^{-x} + x - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

Lösung des AWP.

Diese Lösung erfüllt nun wegen

$$\begin{aligned} \varphi(1) = 2e \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a+1}{2}\, e^1 + \frac{3-a}{2}\, e^{-1} + 1 - 1 = 2e \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{a+1}{2}\, e^2 + \frac{3-a}{2} = 2e^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad a \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2e^2 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad a \cdot \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{3}{2} \bigl(e^2 - 1 \bigr) \\ &\Longleftrightarrow \quad a = 3 \end{aligned}$$

genau dann die zusätzliche Bedingung $y(1) = 2e$, wenn $a = 3$ gilt; in diesem Fall ergibt sich als Lösungsfunktion

$$\varphi(x) = 2\, e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$